SESIÓN 2

GRAFICAS DE FUNCIONES, INTERVALOS

I. CONTENIDOS:

1. Representación gráfica de una función.
2. Problemas aplicados.
3. Intervalo de una variable
4. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Problemas propuestos

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Comprenderá la importancia de representar una función por medio de una gráfica
- Podrá realizar aplicaciones prácticas
- Entenderá cómo se interpreta un campo de variación de una variable
- Describirá las propiedades de una sucesión y una serie

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Cómo se puede resolver un problema de optimización utilizando una gráfica?
- ¿Por qué en un problema específico una variable solo puede tomar ciertos valores?
- ¿Qué diferencia y semejanza hay entre una sucesión de números y una serie de ellos mismos?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Representación gráfica de una función

Una forma útil de representar una función y poder resolver un problema es mediante su gráfica. Usualmente suelen representarse los valores de la variable independiente en el eje horizontal del plano cartesiano (eje de las x) y los valores de variable dependiente (y o f(X)) en el eje vertical de plano cartesiano (eje de las y).

La gráfica de una función y=f(X) es el lugar geométrico de los puntos (X, Y) que satisfacen a la ecuación y=f(X)

Para trazar la gráfica de una función observemos los siguientes pasos:

1. La función debe estar expresada como una función explícita de “Y” con respecto a “X”

2. Elaboramos una tabla donde especifiquemos lo valores de “x” e “y”.

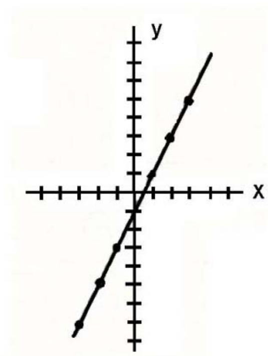
3. Hacemos el trazo de la gráfica siguiendo ciertas reglas

4. Analizamos la gráfica para dar respuesta al problema

Consideramos solo dos variables en la cual una está en función de la otra

Ejemplos:

1. Trace la gráfica de la función Y = 2x – 1



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Fig. 1

2. Trace la gráfica definida por la función: y= $3 - 2x - x^2$, o $f(X) = 3 - 2x - x^2$. Es conveniente que tomemos una serie de valore positivos y negativos, de tal manera que la gráfica defina mejor y construyamos la tabla.

Asignemos a x= -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4 calculando el valor de “y” para cada valor asignado a x, nos arroja una serie de pares ordenados que registramos en la siguiente tabla.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	-21

Fig. 2

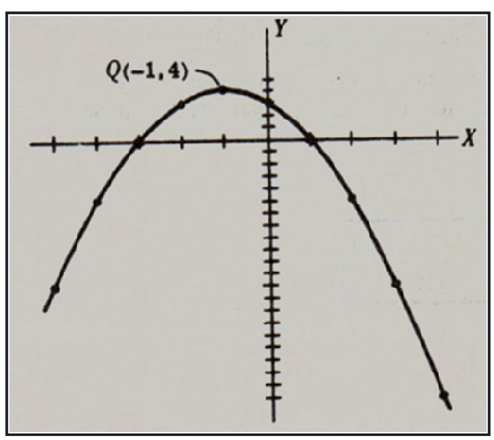


Fig. 3

3. Construir la gráfica definida por la función: $y= 4x - x^3$ dando los siguientes valores a x= -3,-2.-1, 0, 1, 2,3 calculando los valores para "y", poniéndolos en una tabla y trazando la gráfica, queda.

$y = 4x - x^3$

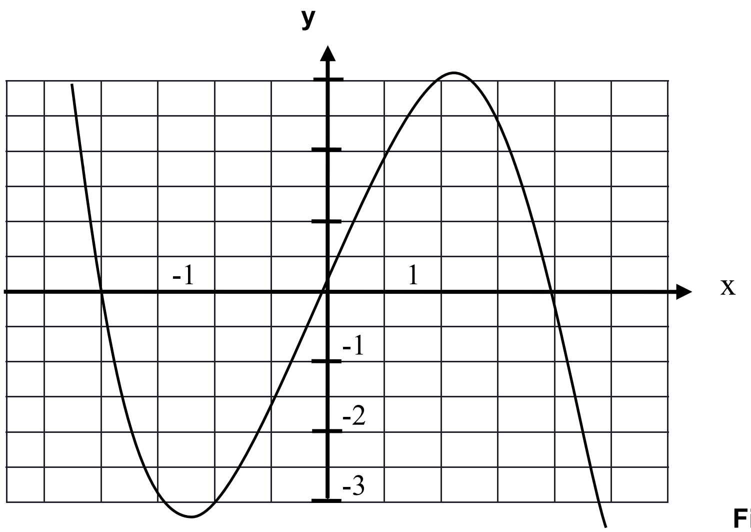


Fig. 4

X	y
-3	15
-2	0
-1	-3
0	0
1	3
2	0
3	-15

2.1. Problemas aplicados

Doña Zoila Díaz cría gallinas en su pequeña granja, desea construir un gallinero en la parte trasera de su casa, sus ahorros le alcanzan para comprar 30 mt de malla ciclónica, solo se cerraran tres lados ya que la barda de la casa se utilizará como el cuarto lado, hallar las dimensiones del gallinero rectangular que tenga la mayor área posible.

Pasos para su solución:

1. De la lectura del enunciado del problema, se trata de encontrar las dimensiones de un gallinero rectangular que ocupe la mayor área posible.

2. En seguida, hacemos un dibujo que nos describa el problema.

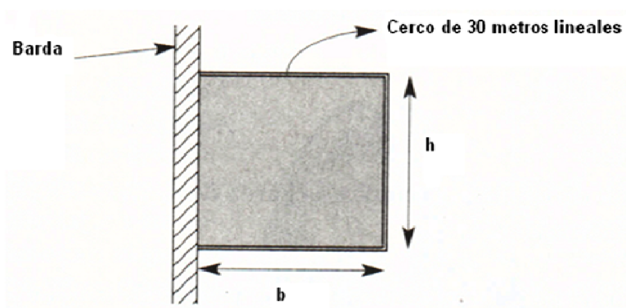


Fig. 5

3. Procedemos a plantear las condiciones matemáticas del problema:

Simbolicemos con una l al perímetro total del gallinero, con una b a la base del rectángulo y con h a su altura.

Entonces: $l = 30$ mts pero también $l = 2b + h$ despejando h: $h = 30 - 2b$

Si llamamos A al área del gallinero, la cual es de forma rectangular, entonces: $A = b \times h$, ejecutando los cálculos. Tenemos

Si $b = 1$ mt $h = 30 - 2(1) = 28$ mts por lo tanto $A = (1\text{mt})(28\text{ mt}) = 28\text{ m}^2$

Si $b = 3$ mt $h = 30 - 2(3) = 24$ mts por lo tanto $A = (3\text{ mt})(24\text{ mt}) = 72\text{ m}^2$

Y así sucesivamente damos valores a b = 5, 7, 9,11 y 15

4. Con los pares ordenados para todos estos valores ya calculados, procedemos a construir la siguiente tabla.

Base (m)	Altura (m)	rea cercada (m^2)
1	28	28
3	24	72
5	20	100
7	16	112
9	12	106
11	8	88
13	4	52
15	0	0

Fig. 6

5. Al hacer un análisis de la gráfica podemos establecer una solución al problema

6. Las dimensiones del gallinero, para que este sea de la mayor área posible son:

- Base b = 7.5 mts
- La altura h la podemos determinar mediante la fórmula: $h = 30 - 2(7.5) = 15$ mt

Un taller de pailería recibe la orden de un cliente de fabricar 1000 recipientes rectangulares de aluminio sin tapa a partir de placas cuyas dimensiones son 12 por 18 cm. Para esto se tienen que hacer cortes cuadrados en cada esquina, de tal manera que al doblar los cuatro lados para formar el recipiente este sea del máximo volumen posible.

x	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6
V	0	160	224	$227\frac{1}{2}$	216	$192\frac{1}{2}$	160	80	0

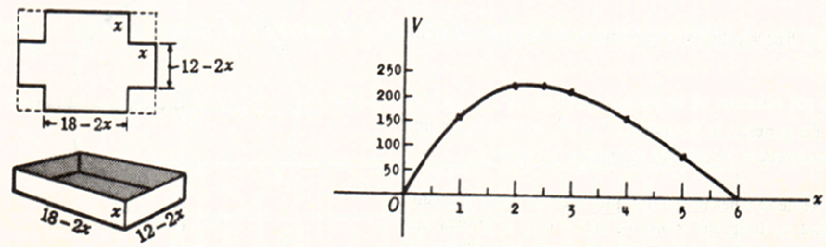


Fig. 7

1. Designemos el lado del cuadrado que se va a cortar en cada esquina por x

2. Por las condiciones del problema podemos trazar las figuras descritas

3. El volumen V del recipiente de acuerdo a la fig. Es V = x (12 – 2x) (18 – 2x)

4. De acuerdo al enunciado del problema y apoyándonos en la fig. x debe variar entre 0 y 6 cm lógicamente los valores deben ser positivos.

5. De acuerdo a lo anterior podemos asignarle valores a x entre 0 y 6 y construir la tabla

6. Se procede a trazar la gráfica

7. Al analizar la gráfica se deduce que el valor de x que corresponde al máximo volumen esta aproximadamente en 2.5 cm

Recuerde que no existen reglas rígidas y rápidas ni "recetas de cocina" que garanticen la solución de un problema. Lo que acabamos de ver con los ejemplos expuestos es que es posible sistematizar algunos pasos generales para este propósito, la práctica y el esfuerzo son esenciales para adquirir la destreza.

3.1. Intervalo de una variable

1. Intervalos finitos: Sean a y b dos números tales que a>b. Al con junto de todos los valores que puede tomar x en el intervalo a y b, se le designa *intervalo abierto* de a hasta b, en matemáticas esto se simboliza a < x < b. A los puntos a y b se les designa extremos del intervalo. Cuando el intervalo es abierto no contiene a sus extremos.

Fig. 8

Un intervalo que contenga a sus extremos recibe el nombre de intervalo cerrado y se simboliza como a ≤ x ≥ b

Observe que cuando el extremo es abierto el círculo del extremo de la recta está vacío y cuando es cerrado esta relleno. Lógicamente estos intervalos se pueden combinar, es decir en uno de sus extremos puede ser abierto y en otro cerrado.

2. Intervalos infinitos. Definamos a cualquier número con la letra a, El conjunto de todos los valores x tales cumplan $x < a$ se designa con el nombre de *intervalo infinito.* Otros intervalos infinitos son los definidos por $x \leq a$, $x > a$ y $x \geq a$.

Intervalo abierto: intervalo cerrado:

Fig. 9

3.- Los intervalos finitos que contienen a uno de sus extremos, se le designa *intervalo semiabierto*

Ejercicios resueltos:

Describir verbalmente y graficar los intervalos

1. a) $-3 < x < 5$, b) $2 \leq x \leq 6$, c) $-4 < x \leq 0$ d) $x > 5$ e) $x \leq 2$

a) Todos los números mayores que -3 y menores que 5

Fig. 10

b) Todos los números iguales o mayores que 2 e igual o menor que 6

Fig. 11

c) Todos los números mayores que -4 o igual o menor de 0

Fig. 12

d) Todos los números mayores que 5

Fig. 13

e) Todos los números iguales o menores de 2

Fig. 14

4.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Problemas propuestos

1. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a).- $y = 3x + 2$ b).- $y = 1 - 2x$ c).- $f(X) = x^2 - 4x + 3$ d).- $f(X) = 4 - 3x - x^2$

e).- $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ f).- $x^2 + y^2 = 16$

2. Calcular el área del rectángulo más largo que puede inscribirse en un triángulo rectángulo de catetos de 6 y 8 cm según se muestra en la siguiente figura:

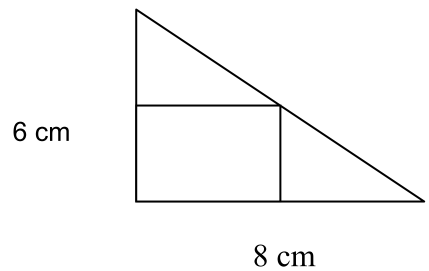


Fig. 15

3. Describa verbalmente y grafique los siguientes intervalos a) $-2 < x < 2$ b) $x < -3$ c) $x > 3$ d) $-5\ x < 0$ e) $x \le 0$ f) $-2 \le x < 3$ g) $x \ge 1$